

# De Copernic à Grothendieck: la puissance du point de vue fécond

Olivia Caramello

Università degli Studi dell'Insubria (Como), Institut Grothendieck et IHÉS

Colloque en l'honneur de Jean-Jacques Szczeciniarz  
Paris, 24 novembre 2022

# But de l'exposé

De Copernic à  
Grothendieck:  
la puissance du  
point de vue  
fécond

Olivia Caramello

Introduction

L'idée de pont

Vision et  
unification

Les topos comme  
'ponts'

Le Soleil comme  
objet 'pont' chez  
Copernic

Conclusions

Dans cet exposé je vais dresser un **parallèle** entre la pensée de Copernic et celle de Grothendieck en m'appuyant sur l'idée générale d'objet "pont".

On verra que cette idée prend des **incarnations différentes** chez les deux penseurs (notamment, le **Soleil** chez Copernic et les **topos** chez Grothendieck, à la lumière de la théorie des "topos comme ponts"). Toutefois, la philosophie sous-jacente est en un certain sens la même.

En fait, on établira des **analogies** assez précises entre le rôle du Soleil dans la vision de Copernic et celui d'un topos classifiant dans la théorie des topos comme ponts.

# Comparer différents objets

De Copernic à  
Grothendieck:  
la puissance du  
point de vue  
fécond

Olivia Caramello

Introduction

L'idée de pont

Vision et  
unification

Les topos comme  
'ponts'

Le Soleil comme  
objet 'pont' chez  
Copernic

Conclusions

- Pour transférer de l'information entre deux entités liées par une certaine relation, il est fondamental d'identifier (et, si possible, de classifier) les propriétés des celles-ci qui sont **invariantes** par rapport à cette relation.
- Selon les cas, cela peut se révéler une tâche traitable ou bien extrêmement ardue.
- En effet, il arrive souvent que deux objets ou situations différents ne puissent pas être liés entre eux de façon **directe** et qu'il soit nécessaire d'adopter un **nouveau point de vue** pour les mettre en relation.
- En effet, une **relation** entre deux objets est en générale une entité **abstraite**, qui vit dans un contexte idéal qui est généralement *différent* de celui dans lequel les deux objets vivent.
- Il est donc d'importance crucial le fait d'identifier des objets plus concrets qui puissent **incarner les invariants** (ou sur lesquels les invariants soient naturellement définis) entre les deux objets et servir comme des 'ponts' pour transférer de l'information entre eux.

# Objets *pont*

Olivia Caramello

Introduction

L'idée de pont

Vision et  
unification

Les topos comme  
'ponts'

Le Soleil comme  
objet 'pont' chez  
Copernic

Conclusions

- Nous pouvons penser à un **objet *pont*** reliant deux objets  $a$  et  $b$  comme un objet  $u$  qui peut être 'construit' à partir de chacun des deux objets  $a$  et  $b$  indépendamment et qui donc admet deux représentations  $f(a)$  et  $g(b)$  reliées par une certaine notion d'équivalence  $\simeq$  :

$$a \quad \overset{f(a) \simeq u \simeq g(b)}{\text{---}} \quad b$$

- Le transfert d'information résulte du processus de '**traduction**' de propriétés **invariantes** de l'objet pont' dans des propriétés des deux objets en utilisant les deux représentations différentes de l'objet pont.

# Contingent et universel

De Copernic à  
Grothendieck:  
la puissance du  
point de vue  
fécond

Olivia Caramello

Introduction

L'idée de pont

Vision et  
unification

Les topos comme  
'ponts'

Le Soleil comme  
objet 'pont' chez  
Copernic

Conclusions

- Chaque langage ou point de vue est **partiel** (ou 'troué') et c'est seulement à travers l'intégration des tous les points de vue que l'on arrive à saisir l'essence des choses.
- Il n'y a pas de langage universel qui serait meilleur (dans l'absolu) que tous les autres ; chaque point de vue met en lumière certains aspects en en cachant d'autres et peut se révéler plus convenable qu'un autre par rapport à un certain but.
- L'**universalité** doit donc être cherchée non pas au niveau des langages mais au niveau des objets 'idéaux' sur lesquels sont définis les **invariants**.
- Il faut donc raisonner à **deux niveaux**, celui des invariants (et des objets sur lesquels ils sont définis) et celui de leurs manifestations dans le contexte des situations 'concrètes', et étudier la **dualité** entre ces deux niveaux, une dualité qui peut être pensée comme celle entre une **unité** abstraite et la **diversité** de ses manifestations concrètes.
- En fait, chaque invariant engendre une véritable **morphogénèse**, résultante de son expression en termes de différentes représentations de l'objet 'pont' ; ainsi, on arrive à mettre en relation des propriétés concrètement complètement différentes et apparemment déconnectées les unes des autres.

# Vision et points de vue

De Copernic à  
Grothendieck:  
la puissance du  
point de vue  
fécond

Olivia Caramello

Introduction

L'idée de pont

Vision et  
unification

Les topos comme  
'ponts'

Le Soleil comme  
objet 'pont' chez  
Copernic

Conclusions

*"Et il arrive, parfois, qu'un faisceau de points de vue convergents sur un même et vaste paysage, par la vertu de cela en nous apte à saisir l'**Un** à travers le multiple, donne corps à une chose nouvelle ; à une chose qui dépasse chacune des perspectives partielles, de la même façon qu'un être vivant dépasse chacun de ses membres et de ses organes. Cette chose nouvelle, on peut l'appeler une **vision**. La vision unit les points de vue déjà connus qui l'incarnent, et elle nous en révèle d'autres jusque-là ignorés, tout comme le point de vue fécond fait découvrir et appréhender comme partie d'un même Tout, une multiplicité de questions, de notions et d'énoncés nouveaux."*

*"Ainsi, le point de vue fécond n'est autre que cet "oeil" qui à la fois nous fait **découvrir**, et nous fait **reconnaître l'unité** dans la multiplicité de ce qui est découvert. Et cette unité est véritablement la vie même et le souffle qui relie et anime ces choses multiples."*

A. Grothendieck

# La “notion unificatrice” de topos

De Copernic à  
Grothendieck:  
la puissance du  
point de vue  
fécond

Olivia Caramello

Introduction

L'idée de pont

Vision et  
unification

Les topos comme  
'ponts'

Le Soleil comme  
objet 'pont' chez  
Copernic

Conclusions

La notion de topos de Grothendieck joue un rôle unifiant en mathématiques :

*“C’est le thème du **topos** qui est ce “lit”, ou cette “rivière profonde” où viennent s’épouser la géométrie et l’algèbre, la topologie et l’arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures “discontinues” ou “discrètes”. Il est ce que j’ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une “essence” commune à des situations des plus éloignées les unes des autres provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques”.*

A. Grothendieck

La théorie des “topos comme ponts” que j’ai développée depuis ma thèse de doctorat fournit un ensemble des techniques permettant d’utiliser les topos comme des “ponts” pour réaliser des transferts de connaissances entre différents domaines des mathématiques : un rôle clef dans cette théorie est joué par la notion logique de **topos classifiant**.

# Les topos classifiants

De Copernic à  
Grothendieck:  
la puissance du  
point de vue  
fécond

Olivia Caramello

Introduction

L'idée de pont

Vision et  
unification

Les topos comme  
'ponts'

Le Soleil comme  
objet 'pont' chez  
Copernic

Conclusions

- Il a été réalisé dans les années '70 que à toute théorie  $\mathbb{T}$  d'une forme très générale on peut associer canoniquement un topos  $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ , appelé son **topos classifiant**, qui représente son 'cœur sémantique'.
- Deux théories ont le même topos classifiant (à équivalence près) si et seulement si elles ont le même 'cœur sémantique', c'est-à-dire si et seulement si elles sont indistinguables du point de vue sémantique ; deux telles théories sont dites **Morita-équivalentes**.
- Deux théories **bi-interprétables** (c'est-à-dire entre lesquelles existe un 'dictionnaire') sont Morita-équivalentes mais, très remarquablement, la réciproque n'est pas vraie.
- La notion d'équivalence de Morita formalise dans beaucoup de situations la sensation de 'regarder la même chose de différentes manières' ou de 'construire un même objet mathématique par des méthodes différentes'.



# Les topos comme *ponts*

- L'existence de **différentes théories** ayant le même topos classifiant se traduit, au niveau technique, par l'existence de **différentes présentations** d'un même topos.
- Des **invariants** des topos peuvent donc être utilisés pour transférer des informations d'une théorie à une autre :

$$\mathbb{T} \overset{\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \simeq \mathcal{E}_{\mathbb{T}'}}{\curvearrowright} \mathbb{T}'$$

- Le **transfert d'information** se réalise en exprimant un invariant donné en termes des différentes représentations du topos.

# Les topos comme *ponts*

- Ainsi, des propriétés (resp. constructions) différentes considérées dans le contexte de théories classifiées par un même topos apparaissent comme des *manifestations* différentes d'une *unique* propriété (resp. construction) qui vit au niveau des topos.
- Chaque invariant des topos se comporte dans ce contexte comme une 'paire de lunettes' qui permet de discerner de l'information 'cachée' dans l'équivalence de Morita considérée ; différents invariants permettent de *transférer* différentes informations.
- Cette méthodologie est techniquement efficace car la relation entre un topos et ses différentes représentations est souvent *très naturelle*, ce qui permet de *transférer aisément des invariants* entre différentes représentations (et donc entre différentes théories).
- Le *niveau de généralité* des invariants topos-théoriques est idéal pour saisir beaucoup d'aspects importants des théories mathématiques. En effet, des invariants importants du topos classifiant  $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$  d'une théorie  $\mathbb{T}$  se traduisent dans des propriétés logiques intéressantes de  $\mathbb{T}$ .

# Une morphogénèse mathématique

De Copernic à  
Grothendieck:  
la puissance du  
point de vue  
fécond

Olivia Caramello

Introduction

L'idée de pont

Vision et  
unification

Les topos comme  
'ponts'

Le Soleil comme  
objet 'pont' chez  
Copernic

Conclusions

- Le calcul des invariants des topos en termes de leurs différentes présentations engendre une véritable **morphogénèse mathématique**, qui permet de relier entre elles des propriétés à l'apparence éloignées les unes des autres.
- Toutefois, l'exploration mathématique résulte en un certain sens '**renversée**', comme dans la **révolution copernicienne** : en effet, plutôt que d'être orientée par des considérations concrètes ou contingentes, elle est guidée par les **équivalences de Morita** et par les **invariants des topos**, à partir desquels on procède pour extraire des informations concrètes sur les théories qu'on souhaite étudier.
- En d'autres termes, c'est le "**point de vue fécond**" fourni par l'objet pont (dans ce cas, un topos donné) qui guide l'investigation mathématique.

# La pensée de Copernic

De la même façon, chez Copernic (et Kepler après lui), c'est l'identification de l'objet pont, autrement-dit, le Soleil, à définir la vision et à orienter la recherche :

*"Enfin, nous placerons le Soleil lui-même au centre de l'Univers. Tout cela est suggéré par le système de la procession des événements et l'harmonie de l'Univers entier, si seulement nous regardons les faits, comme on dit, "les yeux grands ouverts"."*

*"Au centre de tout réside le Soleil. Car qui placerait cette lampe, en ce temple splendide, à une autre ou une meilleure place que là où elle peut tout illuminer en même temps ? Certains l'appellent d'ailleurs, et très justement, la lampe du monde, d'autres son esprit et d'autres encore son gouvernant. (Hermès) Trismegiste le qualifie de dieu visible et l'Electre de Sophocle, celui qui voit toutes choses. Car c'est le Soleil qui, en vérité, gouverne la tournoyante famille des étoiles, assis, en quelque sorte, sur un trône royal."*

N. Copernic

# Invariance et contingence

De Copernic à  
Grothendieck:  
la puissance du  
point de vue  
fécond

Olivia Caramello

Introduction

L'idée de pont

Vision et  
unification

Les topos comme  
'ponts'

Le Soleil comme  
objet 'pont' chez  
Copernic

Conclusions

Une fois mis le Soleil au centre, la Terre apparaît comme rien d'autre que une des différentes planètes qui lui tournent autour, de la même façon qu'une présentation particulière pour un topos donné n'a pas plus d'importance que tout autre présentation de ce topos :

*En conséquence, puisque rien n'empêche la Terre de bouger, je suggère que nous examinions maintenant si plusieurs mouvements la satisfont, de sorte qu'elle puisse être considérée comme l'une des planètes. Parce que ce n'est pas le centre de toutes les révolutions.*

D'ailleurs, Copernic revendique explicitement l'importance des *mathématiques* pour comprendre sa vision, ce qui représente un point en commun de plus avec Grothendieck :

*“S’il se trouve par hasard des mathématiciens qui, ignorant tout des mathématiques mais prétendant être habiles dans cette science, osent, sur la foi de quelque passage de l’Écriture arraché à leur intention, condamner et censurer mon hypothèse, je ne les estime pas, et je méprise leur jugement inconsidéré..”*

# Une analogie avec les topos classifiants

- La **révolution copernicienne** a consisté à adopter comme **point de vue privilégié** pour décrire les mouvements des planètes celui fourni par l'**objet 'pont'**, c'est-à-dire le Soleil, plutôt que celui de n'importe quel planète lui tournant autour (comme la Terre).
- Le Soleil représente dans la vision copernicienne l'analogue d'un **topos classifiant**, et les planètes du système solaire représentent l'analogue des théories classifiées par ce topos.
- La trajectoire qu'une planète donnée effectue autour du Soleil est déterminée par deux ensembles d'ingrédients, à savoir les paramètres déterminant l'ellipse et la période de révolution autour du Soleil. Le couple (paramètres de l'ellipse, période de révolution) d'une planète donnée détermine son orbite et il représente dans ce contexte l'analogue d'un **présentation** d'un topos.

# Une analogie avec les topos classifiants

- De même que le Soleil représente le "bon" point de vue à partir duquel on doit observer l'orbite d'une planète qui lui tourne autour (en fait, le mouvement elliptique d'une planète semble très étrange si on l'observe à partir d'un point de vue autre que l'un de ses foyers), de même le topos classificateur d'une théorie représente l'environnement naturel dans lequel cette théorie doit être étudiée.
- De même que différentes planètes tournant autour de la même étoile peuvent être étudiées en relation les unes avec les autres en utilisant les propriétés de l'étoile commune, des théories Morita-équivalentes peuvent être étudiées en relation les unes avec les autres en utilisant leur topos classificateur commun comme un "pont".

# Une analogie avec les topos classifiants

- Les **trois lois de Kepler** expriment l'existence d'**invariants** qui régissent le mouvements des planètes du système solaire. Ces invariants peuvent être pensés comme des propriétés abstraites de l'étoile autour de laquelle tournent les planètes, se manifestant concrètement par la variété de trajectoires effectuées par les différents planètes.
- Par exemple, la **troisième loi de Kepler** affirme que le rapport du carré de la période orbitale d'une planète par le cube du demi-grand axe de son orbite est une constante qui est caractéristique de l'étoile et ne dépend pas de la planète donnée (c'est-à-dire une **invariant** de l'étoile).
- Le Soleil, ou plus généralement l'étoile autour de laquelle les planètes différentes tournent, peut donc être utilisé comme un **"pont"** pour transférer des informations entre ces planètes ; en effet, à partir de l'étude de la trajectoire concrète d'une planète, on peut déduire la constante de l'étoile, et cet élément d'information détermine à son tour la trajectoire concrète de toute autre planète tournant autour d'elle.



# Idéal = réel ?

- Les ponts abondent en mathématiques et dans d'autres disciplines scientifiques, et ils peuvent être considérés comme 'responsables' (au moins abstraitement) de la **génèse** des choses et de la nature de la réalité telle que nous la percevons.
- L'idée de pont est une abstraction mais, remarquablement, plusieurs ponts dans le contexte des sciences expérimentales peuvent être identifiés avec des véritables objets 'physiques'.
- En effet, les situations les plus éclairantes sont celles dans lesquelles ces objets **idéaux** admettent des représentations '**concrètes**', qui nous permettent de mieux contempler la dynamique de la '**différentiation à partir de l'unité**'.
- La théorie des topos permet de **materialiser** un grand nombre d'objets idéaux, qui peuvent donc servir comme ponts entre une grande variété de contextes différents.
- En général, chercher des **représentations 'concrètes'** de concepts **imaginaires** peut conduire à la découverte d'environnement mathématiques plus riche de '**symétries**' dans lesquels les phénomènes peuvent être décrits d'une façon naturelle et unifiée.

# Pour approfondir

Olivia Caramello

Introduction

L'idée de pont

Vision et  
unification

Les topos comme  
'ponts'

Le Soleil comme  
objet 'pont' chez  
Copernic

Conclusions



O. Caramello

*La «notion unificatrice» de topos, «Lectures Grothendieckiennes»* (SMF and Spartacus, 2022).



O. Caramello

*Grothendieck toposes as unifying 'bridges' : a mathematical morphogenesis*, "Philosophy of Mathematics. Objects, Structures, and Logics", Springer (2022).



O. Caramello

*Grothendieck toposes as unifying 'bridges' in Mathematics*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université de Paris 7 (2016), disponible sur [www.oliviacaramello.com](http://www.oliviacaramello.com).



O. Caramello

*Theories, Sites, Toposes : Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'*, Oxford University Press (2017).