

ENTRE MATHÉMATIQUES ET PHILOSOPHIE : REMARQUES HISTORIQUES

À moins d'être un prophète ou un mage, il faudrait être bien présomptueux pour prétendre prévoir l'avenir d'une discipline, fût-elle la philosophie, et ses rapports avec les autres, les mathématiques par exemple. Une telle anticipation n'exige-t-elle pas en effet un accord sur le sens même du discours philosophique et sur la nature de la connaissance qu'il présente ? Cette anticipation exige également un regard clair sur l'évolution des mathématiques de notre temps. Mais on sait que les philosophes ne s'accordent pas sur le sens de la discipline. Quant au regard sur l'évolution des mathématiques, il n'est pas à notre portée, en raison de l'immensité du savoir technique qu'il requiert, mais aussi parce qu'il engage une détermination dans le possible.

Mon but ici est plus limité, et bien plus modeste. Je voudrais revenir aussi brièvement que possible sur les rapports qui dans l'histoire ont relié philosophie et mathématiques, pour dégager *quelques* invariants qui risquent de s'y retrouver. Il s'agit en fait de délimiter quelques lieux où la philosophie des mathématiques ne cesse d'être active.

Aussi loin que l'on remonte dans l'histoire, on constate qu'aucune discipline scientifique n'a, autant que les mathématiques, contribué à la philosophie théorique ; aucune n'a entretenu avec la philosophie des liens aussi nombreux ni aussi anciens. Depuis l'antiquité, les mathématiques ont offert à la réflexion des philosophes des thèmes centraux ; elles leur ont fourni des méthodes d'exposition, des procédés d'argumentation, parfois même des instruments appropriés à leurs analyses : de Platon à Husserl, bien des philosophes ont réfléchi, chacun à sa manière, sur les mathématiques, lors de l'élaboration de leur philosophie. Ainsi, parmi les tâches que lui assignent les mathématiques, le philosophe s'emploie d'abord à l'éclaircissement de la connaissance mathématique elle-même, en étudiant donc son objet, ses méthodes et les caractères de son apodicticité. D'un bout à l'autre de l'histoire de la philosophie, on s'est continuellement interrogé sur les conditions de cette connaissance mathématique, sur sa genèse, son pouvoir d'extension, la nature de sa certitude, et la place qui est la sienne parmi les autres savoirs. Jamais cependant ces objets de réflexion ne se sont offerts aux philosophes — aux plus grands tout au moins — une fois pour toutes et isolés de l'activité du mathématicien, mais toujours portés par une actualité mathématique qui engageait le renouvellement de l'étude philosophique. Les moments forts de la recherche philosophique ont du reste toujours été l'écho d'un nouveau des

mathématiques elles-mêmes, en raison surtout de l'exigence interne à celles-ci d'un retour sur leurs fondements, ou du moins sur la détermination des fondements d'un de leurs chapitres. Hier à peine on observait un tel retour lorsque, à la fin du XIX^e siècle, il fallut pallier l'insuffisance de l'intuition spatiale comme base d'une étude rigoureuse en analyse, en algèbre et en arithmétique, et chercher d'autres fondements des mathématiques, indépendants de l'intuition spatiale et capables de soutenir une étude rigoureuse en analyse, en algèbre et en théorie des nombres. Par ailleurs, comme chapitre particulier, la question des fondements du calcul des probabilités est toujours d'actualité, ainsi que ses effets sur la pensée philosophique de l'induction et de la causalité. Mais, aussi central qu'il puisse être, ce lien entre philosophie et mathématiques est loin d'épuiser tous les rapports effectifs, multiples et complexes, qui unissent les deux disciplines. Il existe, écrit Jules Vuillemin, « un rapport intime quoique moins apparent et plus incertain entre les Mathématiques pures et la Philosophie théorique. L'histoire des Mathématiques et de la Philosophie montre qu'un renouvellement des méthodes des mathématiques a, chaque fois, des répercussions sur la philosophie théorique »¹.

On avance alors, à juste titre, le platonisme et la découverte des irrationnels, la métaphysique de Descartes et la géométrie algébrique, le principe de continuité dans la philosophie de Leibniz et le calcul infinitésimal ; enfin, plus récemment, la crise de la théorie des ensembles et la première philosophie de Russell, le « degré de confirmation » des néo-positivistes et le calcul des probabilités, etc.

Moins apparent et plus incertain, ce rapport prend diverses formes, qui vont de la collaboration entre le philosophe et le mathématicien, afin d'élaborer une méthode, voire une logique, comme Eudoxe et Aristote à propos de la méthode axiomatique, à l'application directe d'une technique mathématique — l'analyse combinatoire par exemple — à la solution d'un problème métaphysique — l'émanation à partir de l'un (chez les mathématiciens et philosophes, comme Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī au XIII^e siècle). Mais, de toutes les formes que peut revêtir ce rapport, il en est une qui retient particulièrement l'attention et qui cette fois est l'œuvre du mathématicien et non du philosophe : je voudrais parler de ces doctrines que les mathématiciens ont élaborées pour justifier leur propre pratique. Les conditions les plus propices à ces constructions sont réunies lorsque le mathématicien, à l'avant-garde de la recherche de son temps, se heurte à une difficulté insurmontable, issue de l'inadéquation des techniques

¹ J. Vuillemin, *La Philosophie de l'Algèbre*, Paris, 1962, p. 4.

mathématiques disponibles aux objets nouveaux qu'il commence seulement à entrevoir dans l'avenir. Que l'on pense simplement aux diverses variantes de la doctrine des indivisibles chez les premiers analystes, aux considérations sur la notion de limite avant Cauchy, à la doctrine du « motif de croire » chez les premiers probabilistes et enfin aux débats sur la théorie des ensembles avant — et même après — son axiomatisation (Brouwer et Zermelo).

Mais ce rapport, et ses différentes manifestations, ne recouvrent cependant point tous les liens entre les mathématiques et la philosophie. On ne songe certes pas ici à les recenser, non plus du reste qu'à en proposer une vaine détermination *a priori*. Je viens de suggérer que c'est sur le terrain mouvant de l'histoire des mathématiques et de la philosophie qu'il faut aller les chercher, si l'on veut éviter de leur conférer une valeur éidétique, comme on le voit avec certains phénoménologues, lorsqu'ils ont écrit sur l'origine de l'arithmétique ou de la géométrie.

Aussi m'en tiendrai-je à trois lieux d'interaction entre philosophie et mathématiques, qui ont toutes chances de survivre dans l'avenir. Le premier lieu touche à l'ensemble des mathématiques, tandis que les deux autres sont d'une moindre extension.

I-. Un regard attentif montre qu'au cours du XIX^e siècle, les liens entre mathématiques et philosophie n'ont cessé de se renforcer, en raison même du développement des mathématiques. Que l'on pense aux mathématiciens qui étudiaient la géométrie non-euclidienne, comme Bolyai fils ; à ceux qui s'occupaient de l'analyse, comme Bolzano ; ou à ceux qui réfléchissaient sur les fondements de l'arithmétique, comme Dedekind. Il a cependant fallu attendre le deuxième tiers de ce siècle pour assister à l'établissement de rapports qualitativement différents entre philosophie et mathématiques. À cette époque, en effet, les mathématiciens, engagés dans la recherche des fondements des mathématiques, ont pensé trouver dans la logique algébrisée des moyens de répondre à leurs questions. Les logicistes — Frege, Peano, Russell ... — ont considéré les mathématiques comme une partie de la logique, dont les notions et les théories peuvent se réduire à celles de la logique ; ou encore, ils ont pensé que les notions mathématiques peuvent être conclues du principe *a priori* de la logique par des raisonnements déductifs. Ces nouveaux liens entre mathématiques et logique ont été la grande affaire de la philosophie des mathématiques. L'école formaliste (Hilbert et ses élèves) a engagé un travail de justification mathématique des théories formalisées par des moyens

finitistes, la méta-mathématique. Cette recherche entendait répondre aux critiques formulées par Brouwer. Hilbert, pour sa part, n'a jamais adopté une position philosophique formaliste. Les intuitionnistes, Heyting et d'autres, par contre-coup pour ainsi dire, ne pouvaient éviter la recherche logique : logique intuitionniste. En bref, les travaux de ces écoles, les fameuses polémiques entre intuitionnistes et formalistes, n'ont cessé d'enrichir la philosophie des mathématiques. Plus encore, la constitution de la logique mathématique au cours de ces mêmes années a renforcé les liens entre philosophie et mathématiques, tout en mutilant la philosophie qui se trouvait privée de la logique. La nouveauté historique est que les mathématiques peuvent désormais penser leurs méthodes, considérer leurs principes, leurs concepts, leurs fondements, leur axiomatique, les moyens de la preuve ..., et ainsi poser en termes mathématiques des problèmes qui jusque là n'étaient abordés que dans les termes de la philosophie. Cette appropriation de la logique par les mathématiciens aux dépens des philosophes a eu plusieurs conséquences, dont celle de pousser la philosophie vers une forme de logique philosophique, centrée sur les problèmes du langage et des significations. C'est précisément ce que l'on observe, à des degrés divers, à partir de cette même époque.

Ce nouveau rapport entre mathématiques et philosophie a suscité deux problèmes, qui se posent aux philosophes des mathématiques : Y a-t-il encore une place pour la philosophie ? Quelle philosophie des mathématiques est-elle encore possible ? Ces questions ont fait l'objet de la réflexion de bien des philosophes, et elles continuent à le faire. En France, par exemple, elles ont été débattues dans le cercle de Jules Vuillemin et de ses amis, tous héritiers d'un courant qui remonte à Cavaillès et à Lautmann.

Commençons par rappeler que la réflexion mathématique sur les mathématiques commence après l'arithmétisation de la logique par Gödel, et l'intégration de la sémantique aux mathématiques par Tarski. Certes, on peut relever certains acquis antérieurs à Gödel et à Tarski, dans les travaux de Wiener, de Löwenheim, de Skolem, de Herbrand, et dans les écrits de bien d'autres, à la veille des années trente du vingtième siècle². Dans le cas de Gödel, on procède par un codage en nombres entiers naturels des variables, formules, démonstrations formelles, etc., de la théorie formalisée, dans une logique du premier ordre. Ce procédé ne fait pas intervenir la sémantique,

² Voir par exemple, Thoralf Skolem, « Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions : A simplified proof of a theorem by L. Löwenheim and generalizations of the theorem », dans Jean van Heijenoort (éd.), *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Massachusetts/London, Harvard University Press, 1967, p. 252-263.

même si celle-ci apparaît masquée dans l'utilisation du paradoxe du menteur. Autrement dit, comme l'écrit Marcel Guillaume, « C'est en suivant l'idée naturelle de reproduire le raisonnement du paradoxe du Menteur en substituant la notion de démontrabilité formelle à celle de vérité que Gödel, après avoir résolu quelques difficultés techniques, est finalement parvenu à sa théorie d'indécidabilité »³.

Dans le second cas, Tarski fait correspondre à chaque terme d'une théorie formalisée un objet d'une théorie considérée comme intuitive. Il considère qu'il a un modèle de la théorie si les axiomes formels correspondent à des énoncés vrais dans la théorie intuitive. Dans ce cas, on prolonge et on généralise le procédé que les géomètres du XIX^e siècle utilisaient pour démontrer la non-contradiction relative d'une géométrie, lorsqu'ils établissaient un lexique bilingue permettant de construire un morceau d'espace euclidien à l'image d'un espace non-euclidien. Cette découverte par les géomètres de telles traductions internes est sans doute l'un des acquis majeurs des mathématiques au XIX^e siècle (Beltrami, Klein, entre autres). On peut d'ailleurs soutenir sans exagérer que, à côté des développements de l'algèbre, c'est sur ce terrain que le concept de structure a émergé.

Ce que vise la méthode appliquée ici, c'est découvrir les propriétés d'une théorie, c'est-à-dire d'un ensemble de propositions dans un langage L, à partir des propriétés de ses modèles ; un modèle étant une structure d'objets, satisfaisant toutes les propositions de la théorie. Mais là se pose un problème, dit de compacité, par analogie avec la topologie : si les parties finies d'une théorie ont des modèles, la théorie tout entière en a-t-elle un ? La réflexion avance ainsi par construction des représentations des objets, permettant de travailler avec eux. Il s'agit donc d'une réflexion qui procède par construction de concepts dans l'imagination. Mais cette réflexion est étrangère à celle du philosophe. Celui-ci, comme l'a souligné Kant, procède par comparaison de concepts, et sa réflexion ne parvient pas à produire des représentations ou des schèmes. Dans la théorie transcendantale de la méthode, Kant distingue en effet entre la connaissance mathématique, laquelle est la connaissance rationnelle par construction de concepts, et la connaissance philosophique, par comparaison de concepts. Cette différence en entraîne d'ailleurs bien d'autres, qui distinguent les deux types de connaissance. À ce propos, voici ce qu'écrit Kant : « Il y a bien une synthèse transcendantale faite de purs (*lauter*) concepts, qui, à son tour, ne réussit qu'au philosophe ; mais elle ne concerne jamais qu'une chose en général sous les conditions de laquelle sa perception peut appartenir à l'expérience possible. Or, dans les problèmes mathématiques, il

³ M. Guillaume, "Logique mathématique en sa jeunesse", in Jean Pier (ed.), *Development of Mathematics 1900-1950*, Birkhäuser, 1994, pp. 185-367, p. 242.

n'est pas du tout question de cela, ni, en général, de l'existence ; il ne s'agit en eux que des propriétés des objets en eux-mêmes, uniquement en tant qu'elles sont unies au concept de ces objets »⁴. Les mathématiques procèdent par construction des concepts dans l'intuition. Ainsi, la pensée mathématique adhère à l'individualité de l'image. Mais l'accord entre les mathématiciens sur la représentation, accord atteint car, toutes les hypothèses étant admises, la conclusion s'ensuit, cache un désaccord philosophique irréductible. Or l'analyse de ce désaccord ramène inévitablement au problème de l'ontologie mathématique. Celle-ci sera entendue en des sens bien différents. On peut évoquer le plus ancien d'entre eux, celui qui oppose le réalisme de Platon au conceptualisme d'Aristote.

Ce problème de l'organisation de l'ontologie, ainsi que tous ceux qui s'y rattachent, est bien un problème philosophique. Il est fortement présent dans les discussions menées aujourd'hui encore entre les options rivales de l'intuitionnisme, celles qui opposent les différentes versions du constructivisme, etc. La réflexion philosophique qui s'en empare se distingue cependant de celle de la philosophie devenue langagière. Alors en effet que celle-là ne peut contourner l'histoire des mathématiques, celle de la philosophie langagière reste généralement étrangère à cette histoire. D'autre part, si le mathématicien peut ignorer — et c'est bien le cas — les questions soulevées par la philosophie langagière, il ne peut rester indifférent à la réflexion sur l'organisation de l'ontologie. Enfin, le philosophe ne sera pas cette fois tenté de fournir des « constructions rationnelles », au sens où l'entend la philosophie analytique, c'est-à-dire une représentation logique idéale des faits mathématiques qui ne correspond du reste pas aux faits mathématiques dans le cas des faits significatifs ; mais il cherchera les principes et les concepts qui président à cette organisation, et lui donnent aussi bien son sens que sa portée universelle.

Il est vrai que certains traits de l'organisation de l'ontologie peuvent être examinés à l'aide des mathématiques elles-mêmes, mais jamais tous. On peut étudier rigoureusement les expressions et les raisonnements mis en œuvre pour élaborer cette organisation à l'intérieur d'une seule théorie, mais jamais généralement. On peut ainsi démontrer des propositions telles que : non-contradiction d'un système de propositions, complétude d'un système de propositions, décidabilité des propositions d'un système (il existe un algorithme pour désigner toute proposition vraie). Mais ces études ne semblent pas épuiser toutes les questions soulevées par l'organisation de l'ontologie, à moins de soutenir que les mathématiques seraient une syntaxe du langage, la

⁴ *Critique de la Raison Pure*, traduction Tremesaygues et Pacaud rectifiée, p. 496.

vérité mathématique étant alors une propriété logique à l'intérieur du métalangage. Sans nous lancer ici dans une telle discussion, il suffit de constater qu'ici encore il s'agit d'un choix ontologique. Je rappelle seulement que Gödel était convaincu d'avoir établi rigoureusement que le programme syntaxique est irréalisable et qu'il est impossible de se défaire de l'idée de « faits » mathématiques dotés d'un contenu réel, qui sont exprimés par les propositions mathématiques. Voici ce qu'il écrit dans son étude *Les Mathématiques sont-elles une syntaxe du langage ?* : « Toutes les tentatives visant à éliminer (*analyzing away*) les faits, donnés ou supposés, exprimés dans les axiomes des mathématiques, ont échoué et devaient nécessairement échouer : on peut démontrer que les axiomes ne peuvent être remplacés par les définitions et la règle permettant de substituer le *definiens* au *definiendum*. Si l'on réduit les mathématiques à la logique (dans le sens du système Frege-Russell), alors on doit adopter des axiomes concernant les termes primitifs de la logique, axiomes dont certains sont si peu triviaux qu'ils sont rejetés comme faux ou dénués de signification par de nombreux mathématiciens. Si l'on remplace les axiomes mathématiques par des règles syntaxiques, on a besoin d'axiomes de même force relatifs aux termes primitifs de la syntaxe ou relatifs aux concepts abstraits ou transfinis pour en faire usage dans les considérations syntaxiques⁵ ». Il reste que le choix de Gödel d'un certain platonisme mathématique reflète à son tour sa conception de l'organisation ontologique et sa difficulté. Il écrit lui-même : « Mon article sur Carnap a démontré que les mathématiques *ne* sont *pas* de la syntaxe logique du langage, mais il n'a pas démontré l'assertion positive de ce que sont les mathématiques⁶ ».

Il reste en revanche que l'organisation de l'ontologie est étrangère à l'axiomatique en tant que système hypothético-déductif. Je pense que J. Vuillemin dit vrai lorsqu'il écrit : « De nombreux praticiens des mathématiques admettent — comme l'ont fait même les anciens — la réalité des objets dont ils parlent, que ce soient des polygones et des polyèdres, ou des cercles et des sphères, ou des structures plus abstraites telles que le système de grandeurs d'Eudoxe. Mais une telle interprétation ne nous est jamais imposée par les axiomes eux-mêmes, qui ne nous disent pas ce que sont les éléments. C'est à la philosophie grecque qu'a été laissée la tâche de s'interroger sur la nature des choses qui sont présupposées par les systèmes axiomatiques, mais ne sont pas

⁵ K. Gödel, *Is Mathematics Syntax of Language*, Kurt Gödel, Collected Works, vol. III: Unpublished essays and lectures, edited by Solomon Feferman et al., New York-Oxford, Oxford University Press, 1995. Traduit en français par Dominique Fagnot et Gerhard Heinzmann dans *Dialogue* 34 (1995), p. 3-34 ; p. 17-18 .

⁶ Cité par Hao Wan, *Reflections on Kurt Gödel*, The MIT Press, 1987, p. 23.

incluses en eux. Que sont les nombres, les points, les lignes ? Quelle espèce d'existence peut-on revendiquer pour eux ? Ce sont des questions philosophiques.⁷»

À cette interrogation philosophique irréductible sur l'ontologie pour l'ensemble des mathématiques vient s'en ajouter une autre, plus thématique et plus régionale, engendrée par l'interaction des différentes disciplines mathématiques. Avant-hier, l'interaction entre géométrie et une arithmétique d'entiers a exigé l'intervention du philosophe pour élucider les notions de rapport, d'irrationalité, de fractions, etc. Hier, l'interaction entre algèbre et géométrie et algèbre et arithmétique a requis l'élucidation des notions d'espace, de courbe, de l'angle de contingence, de la démonstration constructive de l'impossibilité d'une solution entière de certaines équations diophantiennes. Aujourd'hui on peut évoquer l'intervention de la logique (où l'on considère des propositions qui en un sens renvoient à l'« objet quelconque ») dans la démonstration des propositions mathématiques qui traitent des courbes et des variétés algébriques, et donc à des objets singuliers (la démonstration négative du 10^e problème de Hilbert⁸ par J. Matjasevitch à l'aide des ensembles récursivement énumérables), ou l'intervention des ordinateurs (machines) dans la solution des problèmes mathématiques (la découverte de certains nombres de Mersenne, le problème des quatre couleurs, etc.). Dans chaque cas, on procède par une organisation d'une ontologie régionale qu'il faut expliciter et décrire avant de soulever la question importante de la convergence de ces ontologies à un moment de l'histoire de la recherche mathématique. Dans certains de ces cas, comme celui des quatre couleurs, se trouve posée la question du rôle, apparemment inévitable, de l'ordinateur dans la démonstration, et du statut d'une telle démonstration que personne n'est à même d'expliquer. On s'interrogera aussi sur le statut des solutions suggérées par l'ordinateur en théorie des nombres ou dans le cas des systèmes dynamiques. Questions aujourd'hui très difficiles en raison de la spécialisation de plus en plus étroite en mathématiques.

Ces investigations philosophiques, si j'ose dire, dureront autant que dureront les mathématiques, même si celles-ci doivent devenir purement algorithmiques — sachant d'ailleurs depuis Gödel que l'algorithmique n'épuisera jamais la pensée mathématique.

⁷J. Vuillemin, *What are Philosophical Systems?*, Cambridge University Press, 1986, p. 104.

⁸ « Trouver une méthode (algorithme) par laquelle, en un nombre fini d'opérations, on pourra distinguer si une équation diophantienne est résoluble en nombres entiers rationnels. » Il apparaîtra quelques quarante années plus tard qu'il s'agit là d'un problème de logique.

II-. Mais l'investigation philosophique survivra dans deux autres domaines au moins, propices au développement de la philosophie théorique. Le premier est né de l'inadéquation entre les moyens techniques à la disposition du mathématicien, et les nouveaux objets qu'il devine, plus qu'il ne perçoit, se dessiner au loin à l'horizon. Que l'on pense à ceux qui, avant toute topologie, voulurent traiter des comportements asymptotiques ; ou encore aux mathématiciens qui, en théorie des nombres, affrontaient les problèmes impossibles (le théorème de Fermat par exemple), armés des seuls moyens élémentaires de la géométrie euclidienne ou de l'algèbre des polynômes.

Le deuxième domaine, qui n'est pas moins fécond pour le philosophe, tient à la persistance d'une indétermination sémantique irréductible, qu'il n'est pas rare de rencontrer lors de l'application des mathématiques. Le décalage entre une théorie mathématique et son interprétation laisse en effet apparaître une indétermination sémantique, en rapport inverse à l'élaboration théorique des notions destinées à épouser les mathématiques. J'ai pu distinguer jadis dans cette perspective trois sortes d'applications des mathématiques, qui ne se valent pas. Il y a d'abord l'application directe aux données de l'expérience immédiate, telle qu'on la rencontre dans l'*Optique* d'Euclide, la dynamique d'un Bradwardine ou l'économie d'un Walras ou d'un Pareto : on obtient un genre de « science pure ». Il y a ensuite l'application des mathématiques par l'intermédiaire d'une discipline elle-même plus ou moins mathématisée ou considérée comme telle, aux données de l'expérience ; on obtient alors des théories locales : tel est le schéma mécanique dans l'*Optique* d'Alhazen ou de Descartes ; ou le modèle statique que conçoit un Tartaglia pour expliquer le mouvement violent ; ou encore le modèle forgé par Von Neumann et Morgenstern pour l'*homo economicus*. Il y a enfin l'application des mathématiques à des schémas théoriquement élaborés et bien structurés, suscités, certes, par les données de l'expérience, mais déjà totalement indépendants de celle-ci, dans leurs formes aussi bien que dans leurs dynamismes. Que l'on pense, par exemple, aux lois de Kepler. Celles-ci ne décrivent nullement les « apparences » du mouvement des planètes, c'est-à-dire notre expérience de ce mouvement. Elles décrivent des trajectoires elliptiques que nul n'a perçues ni ne percevra jamais, fût-ce d'une manière approchée. Les lois keplériennes, objets complètement mathématisés, rejoindront par intégration la loi newtonienne d'attraction. Dans chacune de ces sortes d'application des mathématiques, on observe un décalage entre les mathématiques appliquées et leurs interprétations. Or l'indétermination

sémantique que révèle ce décalage croît au fur et à mesure que les schémas théoriques forgés à partir de l'expérience sont moins élaborés et moins structurés. Quoiqu'il en soit, dans aucune de ces situations on ne pourra faire l'économie de l'élucidation philosophique. L'application des mathématiques aux sciences sociales en particulier, ainsi que certaines applications du calcul des probabilités, ont suscité, et continueront à susciter dans les prochaines décennies tout au moins, les deux situations signalées plus haut. Pour fixer les idées, j'évoquerai ici un seul exemple, né de l'application des probabilités : celui de la causalité en rapport avec les probabilités conditionnelles. C'est là, en effet, un bon exemple du problème que je viens d'évoquer : celui de l'écart entre la théorie mathématique et son interprétation, et de l'irréductibilité d'une certaine indétermination sémantique, qui n'a cessé d'attirer l'attention des mathématiciens et des philosophes depuis la fin du XVII^e siècle. Tous d'ailleurs ramènent cette question à celle de la dépendance stochastique, c'est-à-dire à celle de la probabilité conditionnelle et au théorème de Bayes.

Pour mieux élucider ce problème, reprenons-le à partir des études axiomatiques des probabilités, pour pouvoir l'examiner dans des situations mieux contrôlées syntactiquement. Il s'agit de savoir comment se présente la notion de dépendance stochastique dans de telles études, et comment elle se justifie.

III-⁹. La nécessité d'un exposé axiomatique s'est fait jour au début du siècle précédent, beaucoup moins pour résoudre les paradoxes du calcul des probabilités, qu'affectionnait Joseph Bertrand, par exemple, que pour rendre compte des nouvelles applications de ce calcul en mathématiques et en physique, et en raison de la multiplicité et de la richesse des résultats obtenus depuis Laplace. L'axiomatisation devient en fait un mot d'ordre lancé par Hilbert au Congrès de Paris de 1900, publié en 1901, sixième problème. Voici ce que disait Hilbert : "Les recherches sur les principes fondamentaux de la géométrie nous conduisent à envisager ce problème : traiter sur ce modèle les branches de la physique où les mathématiques jouent un rôle aujourd'hui prépondérant ; ces branches de la science sont, avant toutes autres, le calcul des probabilités et la mécanique.

Quant aux axiomes du calcul des probabilités, il me semblerait très désirable que l'on en fît la discussion en même temps qu'en physique mathématique, on développerait parallèlement d'une manière rigoureuse et satisfaisante la

⁹ Voir R. Rashed, «Probabilité conditionnelle et causalité : un problème d'application des mathématiques», in J. Proust et E. Schwartz (éds), *La connaissance philosophique. Essais sur l'œuvre de Gilles Gaston Granger*, Paris : PUF, 1994, p. 271-293.

méthode des valeurs moyennes, et cela tout particulièrement dans la théorie cinétique des gaz¹⁰.

Hilbert se fait ainsi l'écho d'un mouvement alors à peine perceptible, mais qui va en s'amplifiant sur un demi-siècle. Il cite lui-même Bohlman (1900). On peut ajouter A. Wiman (1900, 1901), ainsi que d'autres tentatives qui ne tarderont pas à succéder à celles-ci : E. Borel (1905), S. N. Bernstein (1917), R. von Mises (1919), A. Łomnicki (1923), H. Steinhaus (1923), etc. Les différentes axiomatiques doivent toutes répondre aux deux questions que l'on peut ainsi formuler :

- 1-. quels sont les événements, c'est-à-dire les objets, supposés probables ?
- 2-. quel type de fonction sur les événements devrait être la probabilité ?

À la question "des objets supposés probables", on a répondu par l'algèbre de Boole, et à celle du "type de fonction" par la théorie borélienne de la mesure, et plus spécifiquement par la théorie de Lebesgue. Ces réponses, dont chacun sait qu'elles furent celles de A. N. Kolmogorov en 1933¹¹, ont rallié la majorité des mathématiciens ; mais cette histoire ne nous concerne pas ici. Rappelons cependant, en termes équivalents, qu'il s'agit, pour un ensemble Ω , de définir une σ -algèbre d'événements sur Ω qui le transforme en un espace mesurable ; la probabilité ne sera alors rien d'autre qu'une mesure positive de masse 1.

A partir de cette date, la théorie des probabilités ne s'attache, comme l'écrit Doob, qu'aux "propriétés de mesure des différents espaces et [aux] relations mutuelles des fonctions mesurables définies sur ces espaces"¹² ; ou encore, "la théorie des probabilités est simplement une branche de la théorie de mesure, avec une insistance particulière et un domaine particulier d'application"¹³.

Ce point de vue est un acquis définitif depuis l'axiomatique de Kolmogorov. Une notion cependant demeure qui empêche de réduire complètement - sur le

¹⁰“Sur les problèmes futurs des mathématiques”, traduit en français par M. L. Laugel, dans *Compte Rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens*, Paris, Gauthier-Villars, 1902, p. 81-82.

¹¹Il s'agit de *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, publié en 1933 dans les *Ergebnisse der Mathematik*, traduit en anglais en 1950 : *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea, N. Y.

¹²J. L. Doob : *Stochastic Processes*, J. Wiley, London : p. 2.

¹³*Ibid.* : p. V.

plan sémantique - la théorie des probabilités à l'analyse mathématique : c'est la notion de conditionnement, même si celle-ci se ramène syntactiquement à la désintégration des mesures ; Kolmogorov lui-même introduit¹⁴ la probabilité conditionnelle à partir du théorème des probabilités composées (et le théorème de Bayes à partir du théorème des probabilités totales). Il suppose dans l'expression de la probabilité conditionnelle $\frac{P(A|B)}{P(B)}$ que $P(B) \neq 0$; mais il est très difficile d'élaborer la théorie dans le cas où $P(B)$ peut s'annuler, cas que l'on rencontre inévitablement.

Mais cette définition de la probabilité conditionnelle a fait surgir une difficulté. Voici ce qu'écrit De Finetti à ce propos : "Il semble n'y avoir aucune justification de l'utilisation du théorème de la probabilité composée comme définition de la probabilité conditionnelle, pas plus que de l'introduction de la restriction $P(B) \neq 0$ "¹⁵. Si on accepte cette critique de De Finetti, on pourra ainsi avoir $\frac{P(A|B)}{P(B)} = 0/0$, indéterminé. Plus généralement, dans certains problèmes de probabilités, on rencontre des mesures non bornées, alors que la théorie de Kolmogorov ne reconnaît qu'une mesure bornée normée par la condition $P(\Omega) = 1$.

Le problème peut être exprimé de la manière suivante : des mesures non bornées peuvent être utilisées pour calculer la probabilité conditionnelle comme quotient des valeurs d'une mesure non bornée de deux ensembles (le premier est contenu dans le second) et de cette manière nous pouvons obtenir des valeurs raisonnables, qui n'excèdent pas 1. C'est la raison pour laquelle les mesures non bornées peuvent être utilisées avec succès pour le calcul des probabilités conditionnelles ; mais, comme l'emploi de ces mesures ne peut trouver sa justification dans la théorie de Kolmogorov, il va falloir généraliser cette théorie. Il semble bien que Kolmogorov lui-même ait pensé à cette généralisation ; d'autres mathématiciens s'y sont essayés à leur tour, comme A. Rényi.

¹⁴A. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, op. cit. (trad. anglaise) : p. 6.

¹⁵Bruno de Finetti : *Probability, induction and statistics*, J. Wiley, London 1972 : 82.

Pour généraliser la théorie de Kolmogorov, Rényi¹⁶ a précisément donné la primauté au concept de probabilité conditionnelle, et énonce ce système d'axiomes :

Soient Ω, \mathcal{A} : σ -algèbre sur Ω , $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Ax. 1 $P(A|B) \geq 0$ si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.

De plus

$P(B|B) = 1$ si $B \in \mathcal{B}$.

Ax. 2 Soit $B \in \mathcal{B}$ quelconque donné, $P(A|B)$ est une mesure, c'est-à-dire :

si $A_n \in \mathcal{A}$ ($n = 1, \dots$) et $A_j A_k = \emptyset$, pour $j \neq k$ ($j, k, = 1, 2 \dots$),

on a

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B).$$

Ax. 3 Si $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{B}$ et $BC \in \mathcal{B}$, on a

$$P(A|BC) \cdot P(B|C) = P(AB|C).$$

Si ces trois axiomes sont satisfaits, on a alors l'espace des probabilités conditionnelles $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A|B)]$.

Pour ces mathématiciens, le concept de probabilité conditionnelle se trouve introduit comme concept de base destiné à résoudre mathématiquement un problème mathématique : celui des mesures non - bornées. Mais il demeure dans ce concept un résidu de sens indéterminé qui a incité Rényi à se convertir en philosophe et à écrire un dialogue philosophique¹⁷ qui met en scène une correspondance scientifique imaginaire entre Pascal et Fermat, en pur style du XVII^e siècle. Dans ce dialogue, il justifie sa démarche par un nouvel axiome, qu'il nomme l'axiome de probabilité objective, et qui n'est en fait, selon ses propres termes, que "l'axiome de la causalité, selon lequel toutes les causes qui influencent ensemble un phénomène déterminent exactement la cause du phénomène, et les mêmes causes déterminent toujours les mêmes effets"¹⁸. Quant à la probabilité conditionnelle, Rényi affirme qu'elle ne diffère pas

¹⁶A. Rényi : "On a new Axiomatic Theory of Probability", *Acta Math. Acad. Sci. Hungarica*, 6 (1955) : 285 - 334.

¹⁷A. Rényi : *Letters on probability*, Wayne State University Press, Detroit 1972.

¹⁸*Ibid.* : 43 - 44.

fondamentalement de la probabilité simple. La raison en est, selon ses propres termes, la suivante : "La probabilité d'un événement quelconque dépend des conditions relativement auxquelles sa réalisation ou sa non-réalisation est observée"¹⁹. Or, par le terme "conditions", Rényi ne semble pas désigner la catégorie d'épreuve uniquement, mais, bien plus, une "généralisation du principe de causalité" : "Toutes les circonstances qui peuvent, dans leur totalité, influencer un phénomène, déterminent la cause de ce phénomène de manière non-univoque ; quand, cependant, seulement une partie de ces circonstances est connue, alors la cause du phénomène n'est pas, en général, fixée d'une manière non-équivoque ; mais il y a plusieurs possibilités, chacune d'elles ayant une certaine probabilité"²⁰. Dans ces conditions, le point de départ de Rényi est clair : "Les probabilités sont toutes conditionnelles ; quand les conditions sont bien connues et invariables, elles ne sont pas mentionnées du tout. Mais si les conditions changent, cela doit être considéré aussi bien. Ainsi l'expression "probabilité conditionnelle" est en fait un pléonasme, tout comme l'expression "un homme mortel", puisqu'on sait que tout homme est mortel. Toutefois, pour éviter les malentendus, il est toujours commode de parler de probabilités conditionnelles si les conditions sont variables"²¹.

Pour le probabiliste donc, si la probabilité conditionnelle est justifiée dans les termes généraux d'un principe de causalité, elle se présente comme mesure de la dépendance en fonction de la variation des causes et de notre pouvoir de les connaître. Aussi n'est-il guère surprenant que le parti pris objectiviste masque une interprétation subjectiviste que Rényi ne parvient pas à éliminer.

Nous avons compris que la notion de "probabilité conditionnelle" est celle qui empêche de réduire le calcul des probabilités à l'analyse mathématique ; mais nous avons également vu que cette notion, dans l'exposé de Rényi par exemple, s'impose à l'heure de la solution d'un problème technique ; enfin, nous avons pu noter que l'écart entre la maîtrise mathématique du concept et une certaine indétermination sémantique de celui-ci a exigé du mathématicien qu'il approfondisse l'élucidation philosophique du sens de "conditionnel". Rényi l'a poursuivie en termes trop généraux pour être vraiment efficaces ; et le problème de la causalité est évoqué d'une manière à ce point informelle, qu'il cesse d'être pertinent.

¹⁹*Ibid.* : 32.

²⁰*Ibid.* : 44

²¹*Ibid.* : 32

Ainsi, deux fois dans l'histoire et à deux siècles environ d'intervalle — la première fois avec Condorcet et Laplace, la deuxième fois est celle que nous venons de voir —, le problème de la probabilité conditionnelle s'est posé pour des raisons intrinsèques au calcul des probabilités, indépendamment de toute interprétation. La question du sens de la probabilité conditionnelle et de son interprétation n'a vraiment été formulée que lorsqu'on a voulu construire un modèle de l'une ou l'autre situation de décision ; et les hypothèses de nature théorique sur cette situation de décision sont celles-là même qui ont fourni à l'interprétation ses éléments constitutifs. Dans les deux cas ici considérés, on a pu voir que, sous la terminologie causale introduite par Laplace et qui lui a survécu, il ne reste que le comportement inductif. Deux fois dans l'histoire, on assiste à une double démarche, malgré une différence de situation : saisi d'abord par la probabilité conditionnelle à l'occasion d'une recherche purement mathématique, le concept de dépendance stochastique change de forme, et on n'obtient en fait qu'une version très affaiblie, puisque très générale et qui plus est atemporelle, de la causalité : c'est ce qu'on a pu lire dans Laplace, Condorcet, Rényi, et bien d'autres. Appliquée ensuite à un modèle de décision, il ne reste de la probabilité conditionnelle qu'un problème d'induction statistique : c'est ce qu'on a pu lire avec Condorcet au XVIII^e siècle et Savage au XX^e siècle. Dans ce cas, ce qu'on obtient n'est pas une information sur le rapport entre causes et effets, mais "les degrés de crédibilité ou de croyance" qui nous guident dans les choix entre les décisions sur la base de l'information disponible. L'indétermination sémantique irréductible est au cœur même de l'*homo suffragans* de Condorcet²², de l'*homme bernoullien* de Daniel Bernoulli, ou de l'*homo rationalis œconomicus* des statisticiens et économistes modernes, dont chacun se présente à la fois comme une description commode pour établir une axiomatique d'une théorie de la décision, et comme une théorie du phénomène où l'on veut retrouver le langage de la causalité. Cette dualité est un trait commun à bien des travaux à la suite de Wald, de Neyman et Pearson, de von Neumann et Morgenstern, de T. Haavelmo, de Savage ...

²² R. Rashed, «La mathématisation des doctrines informelles dans la science sociale», in G. CANGUILHEM (ed.), *La mathématisation des doctrines informelles*, Paris, Hermann, 1972, p. 73-105 ; *Condorcet : Mathématique et Société*. Paris : Hermann, 1974.

On comprend les tentatives récentes, comme celle du philosophe P. Suppes, d'introduire la variable temps pour poser le problème de la causalité²³, c'est-à-dire en modifiant l'algèbre des événements, en indexant ceux-ci par le temps, et en établissant un rapport de succession entre les événements. Cette tentative semble encore insuffisante, dans la mesure où il s'agit en fait d'un rapport pseudo-temporel entre deux propositions pour déterminer la probabilité, laquelle permettra d'estimer la validité d'une cause indépendamment de toute considération sur la théorie qui définit cette cause, comme la cause d'un certain effet. C'est d'ailleurs très vraisemblablement dans ces directions et pour surmonter ces difficultés que s'engagera la recherche future sur la causalité et les probabilités conditionnelles, comme l'indiquent les travaux sur la théorie des processus stochastiques, où on conjugue le conditionnement à la variable temps.

Pour conclure, on peut affirmer sans faire de prophétie ni prendre le risque d'être démenti, que l'organisation de l'ontologie, l'indétermination sémantique et les interprétations exigées par les applications, resteront parmi les domaines d'exercice de la philosophie ; mieux encore, cette réflexion philosophique est appelée à s'étendre et à prospérer alors que toutes les modes philosophiques passent. La philosophie des mathématiques ne peut être abordée, me semble-t-il, qu'à partir de l'histoire des mathématiques ou de la logique mathématique et par nulle autre voie, comme par exemple celle de l'analyse linguistique.

²³ P. Suppes, *Probabilistic Metaphysics*, Oxford, Basil Blackwell, 1984, pp. 222 sq.

